MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

LITERA

Sorin Doru Noaghi • Dorin Linț
Maranda Linț • Lucian Nicolae Pițu

Matematika

Tankönyv a VII. osztály számára

TARTALOMJEGYZÉK

1.1. Természetes számok négyzetének négyzetgyöke. Egy pozitív racionális szám négyzetgyökének közelítése

1.l. Természetes számok négyzetének négyzetgyöke

Emlékeztető

Számhalmazok

$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,....\}$ a természetes számok halmaza;

$\mathbb{Z}=\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$ az egész számok halmaza;

$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\,\middle|\,a,b\in\mathbb{Z},b\neq 0\right\}$ a racionális számok halmaza.

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$$

Hatványokra vonatkozó számítási szabályok

Ha $a,b\in\mathbb{Q}^*$, valamint $n,\ p\in\mathbb{Z}$ akkor:

$$a^n\cdot a^p=a^{n+p}$$

$$\left(a^n\right)^p=a^{n\cdot p}$$

$$a^n:a^p=a^{n-p}$$

$$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$$

$$a^n:b^n=(a:b)^n$$

Négyzetszámok

Az $x\in\mathbb{N}$ számot **négyzetszámnak** nevezzük, ha létezik olyan $n\in\mathbb{N}$ szám, melyre igaz hogy $x=n^2$.

Példák

$7\in\mathbb{N},\ 7\in\mathbb{Z},\ 7\in\mathbb{Q}$

$-7\notin\mathbb{N},\ -7\in\mathbb{Z},\ -7\in\mathbb{Q}$

$\frac{1}{7}\notin\mathbb{N},\ \frac{1}{7}\notin\mathbb{Z},\ \frac{1}{7}\in\mathbb{Q}$

$3^1\cdot 3^4=3^{1+4}=3^5$

$\left((-1)^3\right)^2=(-1)^{3\cdot 2}=(-1)^6=1$

$5^4:5^3=5^{4-3}=5$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=\frac{27}{8}$

$(0,6)^2:2^2=(0,6:2)^2=0,3^2=0,09$

49 négyzetszám, mert $49=7^2$

256 négyzetszám, mert $256=16^2$

Oldjuk meg figyelmesen!

a) Keressük meg azokat a természetes számokat, melyeket négyzetre emelve a következő eredményeket kapjuk: 16, 49, 225. Találgatással kapjuk, hogy: $4^2=16$, $7^2=49$, $15^2=225$.

b) Határozzuk meg annak a négyzetnek oldalhosszát, melynek területe 144 cm^2.

$\mathcal{T}_{\square}=l^2$ és $\mathcal{T}_{\square}=144\text{ cm}^2$. Tehát $l^2=12^2$, azaz $l=12\text{ cm}$.

Fedezzük fel, értsük meg!

Értelmezés Legyen $x\in\mathbb{N}$, négyzetszám. Az n természetes számot az x szám négyzetgyökének nevezzük, ha $x=n^2$. Így írjuk: $\sqrt{x}=n$. Így olvassuk: **négyzetgyök** x **egyenlő** n. Az n természetes számot az x szám másodrendű gyökének is nevezhetjük.

Példák

$\sqrt{25}=5$, mivel $5\in\mathbb{N}$ és $25=5^2$

$\sqrt{81}=9$, mivel $9\in\mathbb{N}$ és $81=9^2$.

$\sqrt{0}=0$, mivel $0\in\mathbb{N}$ és $0=0^2$.

$\sqrt{529}=23$, mivel $23\in\mathbb{N}$ és $529=23^2$.

Azt a műveletet, melynek során az $x \in \mathbb{N}$ négyzetszámnak megfeleltetünk egy olyan $n \in \mathbb{N}$ számot, melyre igaz, hogy $x = n^2$, **négyzetgyökvonás**nak, vagy **gyökvonás**nak nevezzük.

négyzetszám

$25 = 5^2$

$\Downarrow$

$\sqrt{25} = 5$

négyzetgyöke

Négyzetszámok	Négyzetgyökök
$225 = 15^2$	$\sqrt{225} = 15$
$256 = 16^2$	$\sqrt{256} = 16$
$289 = 17^2$	$\sqrt{289} = 17$
$324 = 18^2$	$\sqrt{324} = 18$
$361 = 19^2$	$\sqrt{361} = 19$
$400 = 20^2$	$\sqrt{400} = 20$
$441 = 21^2$	$\sqrt{441} = 21$

Alkalmazás

$$\sqrt{17^2} = 17;\ \sqrt{2019^2} = 2019;\ \sqrt{5^6} = \sqrt{\left(5^3\right)^2} = 5^3 = 125;$$

$$\sqrt{(38 \cdot 7 + 98 : 14)^2} = 38 \cdot 7 + 98 : 14;$$

$$\sqrt{2^{2018}} = \sqrt{\left(2^{1009}\right)^2} = 2^{1009};\ \sqrt{2^4 \cdot 3^2} = \sqrt{\left(2^2 \cdot 3\right)^2} = \sqrt{12^2} = 12$$

Következtetés:
$\sqrt{x} = n \Leftrightarrow x = n^2$, ahol $n \in \mathbb{N}$
Tehát $\sqrt{n^2} = n$ bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Általában, egy négyzetgyökvonást tartalmazó kifejezésben előbb a négyzetgyövonásokat végezzük el, majd az összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás műveletét.

$$\sqrt{36} + \sqrt{100} : \sqrt{25} = 6 + 10 : 5 = 8$$

$$\sqrt{64} \cdot \sqrt{9} + \sqrt{25}^{\sqrt{4}} = 8 \cdot 3 + 5^2 = 49$$

Mégis, néha a négyzetgyökvonást más algebrai művelet elvégzése után is elvégezhetjük.

a) $\sqrt{25} \cdot \sqrt{4} = 5 \cdot 2 = 10$ és $\sqrt{25 \cdot 4} = \sqrt{100} = 10$, azaz $\sqrt{25} \cdot \sqrt{4} = \sqrt{25 \cdot 4}$

b) $\dfrac{\sqrt{225}}{\sqrt{25}} = \dfrac{15}{5} = 3$ és $\sqrt{\dfrac{225}{25}} = \sqrt{9} = 3$, azaz $\dfrac{\sqrt{225}}{\sqrt{25}} = \sqrt{\dfrac{225}{25}}$

c) $\sqrt{1600} = \sqrt{16 \cdot 100} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{100} = 4 \cdot 10 = 40$

$\sqrt{\dfrac{1600}{49}} = \dfrac{\sqrt{1600}}{\sqrt{49}} = \dfrac{40}{7}$

Igazak az alábbi összefüggések:

a) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}$ bármely $x, y \in \mathbb{N}$ négyzetszámok esetén.

b) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$, $y \neq 0$ bármely $x, y \in \mathbb{N}^*$, négyzetszám esetén.

c) $\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$, $x, y \in \mathbb{N}$ négyzetszám és $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$, $y \neq 0$ $x, y \in \mathbb{N}$ négyzetszám esetén.

Ne kapkodj!

Feltehetjük a kérdést, hogy az összeadás és kivonás esetén is igaz-e az előbbiekhez hasonló összefüggés.
Hasonlítsuk össze az alábbi eredményeket:

$\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$ és $\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7$

$\sqrt{169-25}=\sqrt{144}=12$ és $\sqrt{169}-\sqrt{25}=13-5=8$

$\sqrt{16+9}\neq\sqrt{16}+\sqrt{9}$

$\sqrt{169-25}\neq\sqrt{169}-\sqrt{25}$

Következtetés: $\sqrt{x+y}$ és $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ **nem egyenlő** bármely pozitív racionális szám esetén.

$\sqrt{x-y}$ és $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ **nem egyenlő** bármely pozitív racionális szám esetén.

Jegyezd meg!

Ha x négyzetszám, akkor azt az n természetes számot, melyre igaz az $x=n^2$ összefüggés, az x szám négyzetgyökének, vagy az x szám másodrendű gyökének nevezzük.
Jelölés: $\sqrt{x}=n$.

$\sqrt{x}=n \Leftrightarrow x=n^2$, ahol $x\in\mathbb{N}$ négyzetszám és $n\in\mathbb{N}$.

$\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=\sqrt{x\cdot y}$; $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$, $y\neq 0$, ahol $x, y\in\mathbb{N}$ négyzetszámok.

$\sqrt{n^2}=n$, ahol $n\in\mathbb{N}$.

Gyakorlatok és feladatok

1. a) Írd le az összes 700-nál nagyobb és 1000-nél kisebb négyzetszámot!
b) Írd le az összes 123 és 321 közötti négyzetszámot!

2. Vizsgáld meg, hogy az alábbi számok közül melyik egy természetes szám négyzete: Indokold a választ.
a) 64, 100, 140, 333, 1000000
b) 2^4, $4^2\cdot 9$, 3^6, 21^8, 10^9, $5^{2\cdot n}$, $6^{4\cdot n+1}$, $n\in\mathbb{N}$.

3. Másold le a füzetbe az alábbi táblázatokat, majd egészítsd ki az üres cellákat, ahol x természetes szám.

a)

x	4	1	0	2	7	11
x^2						

b)

x^2	9	36	400	0	121	49
x						
$\sqrt{x^2}$						

4. Határozd meg az alábbi kijelentések logikai értékét!
$p_1: \sqrt{4}=2$;
$p_2: \sqrt{121}=11$;
$p_3: \sqrt{a^2}=a$, bármely $a\in\mathbb{N}$ esetén;
$p_4: \sqrt{11^2}=-11$;
$p_5: \sqrt{c^2}=c$, bármely $c\in\mathbb{Z}$ esetén;
$p_6: \sqrt{100\cdot b^4}=10\cdot b^2$, bármely $b\in\mathbb{Z}$ esetén.

5. Határozd meg az n természetes számot a következő esetekben!
a) $n^2=81$; b) $n^2=169$; c) $n^2=900$; d) $n^2=441$.

6. Bizonyítsd be, hogy x négyzetszám és számítsd ki $\sqrt{x}$ értékét!
a) $x=19\cdot 9+19\cdot 10$;
b) $x=2^{11}-2^{10}$;
c) $x=200+199\cdot 200$;
d) $x=n+n\cdot(n-1)$, $n\in\mathbb{N}^*$;
e) $x=\sqrt{441}+\sqrt{\dfrac{42\cdot 43+43\cdot 44}{2}}$;
f) $x=\dfrac{3^{n+2}-3^{n+1}-2\cdot 3^n}{3^n}$, $n\in\mathbb{N}$.

7. a) Számítsd ki $x = 9^2 + 12^2$, majd $\sqrt{x}$ értékét;
b) Számítsd ki $y = 25^2 - 7^2$, majd $\sqrt{y}$ értékét;
c) Számítsd ki $z = 13^2 + 2 \cdot 13 \cdot 17 + 17^2$, majd $\sqrt{z}$ értékét.

8. a) Egészítsd ki a hiányzó részeket olyan természetes számokkal, melyekre érvényesek az egyenlőségek:
$2^2 \cdot 3^4 = (\ldots)^2$; $2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^6 = (\ldots)^2$
$2^{100} : 2^{84} = (\ldots)^2$; $2^6 \cdot 5^2 = (\ldots)^2$
b) Számítsd ki: $\sqrt{14^2}$; $\sqrt{7^4}$; $\sqrt{a^2}$, $a \in \mathbb{N}$;
c) Az a) alpont eredményeit használva számítsd ki! $\sqrt{2^2 \cdot 3^4}$; $\sqrt{2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^6}$; $\sqrt{2^{100} : 2^{84}}$; $\sqrt{2^6 \cdot 5^2}$.

9. Adott az $A = \{576, 484, 2025, 1600, 2500, 3600, 1521, 729, 529, 2116\}$ halmaz.
a) Bontsd prímtényezők szorzatára az A halmaz elemeit, majd írd fel ezeket a számokat szorzatok négyzeteként!
b) Az a) alpont eredményeit használva számítsd ki az A halmaz elemeinek négyzetgyökét!

10. Írd le mindegyik gyökjel alatti számot mint egy természetes szám négyzetét, majd végezd el a számításokat:
a) $\sqrt{1156} + \sqrt{3249} - \sqrt{1296}$
b) $\sqrt{1936} + \frac{1}{2}\sqrt{3844}$
c) $1{,}5 \cdot \sqrt{4900} - \sqrt{46656}$

11. a) Adott:
$A = 1 + 2 + \ldots + 10 + 10 \cdot (2^0 + 2^3 + + 2^4 + 2^5)$.
Bizonyítsd be, hogy A négyzetszám és számold ki $\sqrt{A}$ -t.
b) Adott a következő szám:
$B = 1 + 3 + 5 + \ldots + 19$. Bizonyítsd be, hogy B négyzetszám és számold ki $\sqrt{B}$ -t.
c) Adott a következő szám:
$C = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Bizonyítsd be, hogy C négyzetszám és számold ki $\sqrt{C}$ -t.

12. Próbálkozással ellenőrizd az alábbi kijelentéseket:
a) Ha $a, b \in \mathbb{N}^*$, akkor $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$.
b) Ha $a, b \in \mathbb{N}^*$, $a > b$, akkor $\sqrt{a^2 - b^2} \neq a - b$.

2.2. Racionális számok négyzetének négyzetgyöke

Emlékeztető

Az előző leckéből tudjuk, hogy:

$\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$ $\quad \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$, $y \neq 0$ $\quad \sqrt{n^2} = n$ $\quad \sqrt{x} = n \Leftrightarrow x = n^2$ ahol x és y négyzetszámok, $n \in \mathbb{N}$.

Az $x = 0$ esetén $\sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$.
Vizsgáljuk meg, hogy létezik-e $\sqrt{x}$, ha x pozitív racionális szám. Előbb azokkal a racionális számokkal foglalkozunk, amelyek pozitív racionális számok négyzetei.

Oldjuk meg figyelmesen!

Egy négyzet területe 1,69 m^2. Határozd meg a négyzet oldalának hosszát!

I. megoldás. $T_\square = l^2$, $T_\square = 1{,}69$ cm^2. Tehát $l^2 = 1{,}3^2$, azaz $l = 1{,}3$ cm.

II. megoldás. Gyökvonás segítségével: $T_\square = l^2$, $T_\square = 1{,}69$ cm^2.

Tehát $l^2 = 1{,}69$, azaz $l = \sqrt{1{,}69} = \sqrt{\frac{169}{100}} = \frac{13}{10} = 1{,}3 \Rightarrow l = 1{,}3$ cm,

Másképpen: $l^2 = 1{,}69$, tehát $l = \sqrt{1{,}69} = \sqrt{1{,}3^2} = 1{,}3 \Rightarrow l = 1{,}3$ cm.

Fedezzük fel, értsük meg!

Értelmezés
Az x pozitív racionális szám négyzetgyökének nevezzük azt az a pozitív racionális számot, melyre igaz, hogy $x = a^2$.
Így írjuk: $\sqrt{x} = a$.

A. Határozd meg kétféleképpen a következő négyzetgyököket: $a = \sqrt{1,44}$ és $b = \sqrt{0,0025}$

1) $a = \sqrt{1,44} = \sqrt{\dfrac{144}{100}} = \dfrac{\sqrt{144}}{\sqrt{100}} = \dfrac{12}{10} = 1,2$

$b = \sqrt{0,0025} = \sqrt{\dfrac{25}{10000}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{10000}} = \dfrac{5}{100} = 0,05$

2) $a = \sqrt{1,44} = \sqrt{(1,2)^2} = 1,2$

$b = \sqrt{0,0025} = \sqrt{(0,05)^2} = 0,05$

Megjegyzés. Fontos, hogy az előnyösebb módszert válasszuk.

B. Észrevehető, hogy hasonlóan lehet négyzetgyököt meghatározni akkor is, ha a szám végtelen szakaszos tizedes tört formájában van megadva.

$$\sqrt{1,(7)} = \sqrt{\frac{17-1}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3} \text{ és } \sqrt{3,36(1)} = \sqrt{\frac{3361-336}{900}} = \sqrt{\frac{3025}{900}} = \sqrt{\frac{121}{36}} = \frac{11}{6}.$$

Emlékeztető

Az $x \in \mathbb{Q}$ szám abszolút értéke:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Példák

$x = 3,5 > 0 \Rightarrow |x| = x = 3,5$

$x = -4 < 0 \Rightarrow |x| = -x = -(-4) = 4$

Fedezzük fel, értsük meg!

Tudjuk, hogy $\sqrt{n^2} = n$, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén. Mit jelent $\sqrt{x^2}$, ha $x \in \mathbb{Q}$.
Néhány példá:

- ha $x = 1,5$ akkor $\sqrt{x^2} = \sqrt{1,5^2} = \sqrt{2,25} = 1,5 = x$;
- ha $x = -1,5$ akkor $-x = -(-1,5) = 1,5$, tehát $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-1,5)^2} = \sqrt{2,25} = 1,5 = -x$

Következtetés:

$\sqrt{x^2} = x$, bármely $x \geq 0$ esetén;

$\sqrt{x^2} = -x$, bármely $x < 0$ esetén.

Általánosan így írhatjuk:

$\sqrt{x^2} = |x|$, bármely $x \in \mathbb{Q}$ esetén.

Alkalmazás

a) Kiszámítjuk a $\sqrt{x^2}$ értékét $x = 8,9 - 5 : 4$ esetén.
Előbb elvégezzük: $x = 8,9 - 1,25 = 7,65$.
Mivel $x > 0$, alkalmazzuk a $\sqrt{x^2} = x$ képletet, és azt kapjuk, hogy $\sqrt{x^2} = \sqrt{(7,65)^2} = 7,65$.

b) Kiszámítjuk a $\sqrt{x^2}$ értékét, ha $x = 2,7 - 9 : 2$
Előbb elvégezzük: $x = 2,7 - 4,5 = = -1,8$.
Mivel $x < 0$, alkalmazzuk a $\sqrt{x^2} = -x$ és képletet
$\sqrt{x^2} = \sqrt{(-1,8)^2} = 1,8$.

Ha az x racionális számról nem tudjuk eldönteni, hogy pozitív vagy negatív, akkor az általános képletet használjuk. $\sqrt{x^2} = |x|$, bármely x, racionális szám esetén.

c) Ha $x = 2 - 1{,}2 : 0{,}4$ akkor $\sqrt{x^2} = |x|$ és $|x| = |2 - 1{,}2 : 4|$.
Elvégezzük a szükséges műveleteket:
$\sqrt{x^2} = |x| = |2 - 1{,}2 : 0{,}4| = |2 - 3| = |-1| = 1$

Alkalmazás

a) $\sqrt{1{,}44} \cdot \sqrt{9} = 1{,}2 \cdot 3 = 3{,}6$ és $\sqrt{1{,}44 \cdot 9} = \sqrt{12{,}96} = 3{,}6$

b) $\dfrac{\sqrt{1{,}44}}{\sqrt{9}} = \dfrac{1{,}2}{3} = 0{,}4$ és $\sqrt{\dfrac{1{,}44}{9}} = \sqrt{0{,}16} = 0{,}4$

Igazak az alábbi összefüggések:

a) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}$, ha x, y két racionális szám négyzete esetén.

b) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$, ha x, y két racionális szám négyzete, $y \neq 0$.

Jegyezd meg!

Ha x egy racionális szám négyzete, akkor azt az a pozitív racionális számot, melyre igaz, hogy $x = a^2$, az x szám **négyzetgyökének** vagy az x **gyökének** nevezzük. Így írjuk $\sqrt{x} = a$.
Bármely olyan x és y szám esetén, mely racionális szám négyzete, igaz, hogy:

$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}$ és $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$, $y \neq 0$. $\sqrt{a^2} = |a|$, bármely $a \in \mathbb{Q}$ esetén.

Gyakorlatok és feladatok

1. Határozd meg a következő kijelentések logikai értékét, majd egészítsd ki a mondatokat, hogy igazak legyenek:

$p_1: \sqrt{100} = 10$ $p_2: \sqrt{400} = -20$

$p_3: \sqrt{\dfrac{1}{36}} = \dfrac{1}{6}$ $p_4: \sqrt{1{,}96} = 1{,}4$

$p_5: \sqrt{\dfrac{25}{4}} = \dfrac{7}{2}$ $p_6: \sqrt{20{,}25} = \dfrac{9}{2}$

$p_7: \sqrt{0{,}09} = -0{,}3$ $p_8: \sqrt{0{,}0676} = \dfrac{13}{50}$

a) A fenti kijelentések közül az igaz kijelentések a követezők: … .

b) A fenti kijelentések közül a hamis kijelentések a követezők: … .

2. Adott az $M = \left\{1{,}44; \dfrac{36}{25}; \dfrac{4}{16}; 3\dfrac{1}{16}; 1{,}(7)\right\}$ halmaz. Határozd meg a

$P = \left\{x \mid x = \sqrt{y},\ y \in M\right\}$ halmaz elemeit.

3. Másold a füzetbe az alábbi táblázatokat, majd töltsd ki mindkét táblázat üres celláit tudva, hogy a egy pozitív racionális szám.

a)

a	$\frac{2}{3}$	1	0	0,25	1,(3)	$\frac{5}{4}$	$2\frac{1}{3}$
a^2							

b)

a^2	$\frac{1}{9}$	2,25	$\frac{100}{49}$	0	$2\frac{1}{4}$	$\left(\frac{5}{4}\right)^4$	$(0{,}4)^6$
a							
$\sqrt{a^2}$							

4. Számítsd ki az m és n számok összegét tudva, hogy:

a) $m = 1 + \sqrt{0{,}09}$ és $n = 2 - \sqrt{\dfrac{49}{25}}$;

b) $m = \dfrac{2}{5} + \sqrt{\dfrac{25}{4}}$ és $n = 0{,}6 - \sqrt{6{,}25}$.

5. Számítsd ki:

a) $\sqrt{\frac{1}{9}}$; $\sqrt{\frac{81}{25}}$; $\sqrt{\frac{169}{4}}$; $\sqrt{\frac{625}{289}}$; $\sqrt{\frac{3}{300}}$

b) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; $\sqrt{3\frac{13}{36}}$; $\sqrt{4\frac{29}{49}}$; $\sqrt{5\frac{29}{100}}$

c) $\sqrt{0{,}81}$; $\sqrt{0{,}16}$; $\sqrt{1{,}96}$; $\sqrt{4{,}41}$; $\sqrt{20{,}25}$

d) $\sqrt{\frac{2^4}{3^6}}$; $\sqrt{\frac{3^4\cdot 5^6}{7^2}}$; $\sqrt{\frac{12}{3^3\cdot 4^3}}$; $\sqrt{\frac{3^2+4^2}{7^2+24^2}}$

6. Másold a füzetbe az alábbi táblázatokat, majd töltsd ki ezek üres celláit tudva, hogy x egész számot jelöl.

a)

x	-2	-17	12	-2	17	-12
x^2						

b)

x^2	16	1	49	0	121	36
x						
$\sqrt{x^2}$						

7. Határozd meg az n egész szám értékeit az alábbi esetekben:

a) $n^2 = 81$;

b) $n^2 = 169$ és $n > 0$;

c) $n^2 = 900$ és $n < 0$.

8. Adott az $A=\{-3,-2,-1,0,1,2\}$. Határozd meg a következő halmazok elemeit:

$B=\{n \mid n=x^2, x\in A\}$

$C=\{m \mid m=\sqrt{n}, n\in B\}$

9. Másold a füzetbe az alábbi táblázatokat, majd töltsd ki ezek üres celláit tudva, hogy a racionális számot jelöl. Hasonlítsd össze a b) alpontnál kapott értékeket a 2. feladatbeliekkel.

a)

a	1	-1	0	$-0{,}5$	$0{,}5$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$
a^2							

b)

a^2	$\frac{1}{9}$	$2{,}25$	$\frac{100}{49}$	0	$2\frac{1}{4}$	$\left(\frac{5}{4}\right)^4$	$(0{,}4)^6$
a							
$\sqrt{a^2}$							

3.ℓ. Pozitív racionális szám négyzetgyökének becslése

Emlékeztető

Pitagorasz tétele. Bármely derékszögű háromszögben az átfogó négyzete egyenlő a két befogó négyzetének összegével.

Az ABC háromszögben $m(\widehat{A})=90^\circ$, és igaz a $BC^2=AB^2+AC^2$ összefüggés.

Ha $a, b \in \mathbb{Q}_+$ akkor $a<b \Leftrightarrow a^2<b^2$.

• A **becslés** egy mennyiség közelítő meghatározását jelenti, ha az adatok hiányosak vagy nem pontosak.
Míg a megközelítésnél ismerjük az eltérés maximális mértékét, a becslés esetében nem tudjuk, hogy milyen közel vagyunk a pontos értékhez.

• Ha egy számítás során a használt számok megközelítő értékeit használjuk, akkor a helyes eredmény becslését kapjuk meg.

Példák

a) A Băneasa-erdőben levő fák mennyiségét pár százezerre becsülik.

b) A főváros lakosságát több, mint kétmillióra becsülik.

c) A célig hátralevő távolságot 5 km-re becsülik.

d) Tízesekre, hiánnyal való megközelítést használva a 16,2 + + 32+125,7 számítás eredménye 160. A helyes eredmény 173,9.

Oldjuk meg figyelmesen!

Feladat

Sára és Noémi vásárolni mentek Csilla nővérükkel. Három, egyenként 32,9 lejes mértani felszerelést, öt doboz, egyenként 19,29 lejes filctollat valamint tíz, egyenként 10,54 lejes füzetet vásároltak.

Sára: Szükségünk van kevesebb, mint 309 lejre.
Noémi: Szükségünk van több mint 291 lejre.
Csilla: Én azt mondom, hogy körülbelül 304 lejre van szükségünk.
A pénztáros bevezeti a termékek árát, kinyomtatja a számlát, és kijelenti: 300,15 lejt kell fizetni.
Hogyan magyarázható, hogy az összegek nem egyeznek meg? Hibázott valaki?

Ahhoz, hogy megértsük a nővérek válaszainak logikáját, gondoljuk végig a következő lépéseket:
Kiszámoljuk a *fizetni való összeget*: $S = 3 \cdot 32{,}9 + 5 \cdot 19{,}29 + 10 \cdot 10{,}5 = 300{,}15$ (lej)

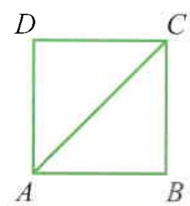
Felbecsüljük az összeget, úgy, hogy az árakat egységekre **többlettel közelítjük:**
$32{,}9 \approx 33$; $19{,}29 \approx 20$; $10{,}5 \approx 11$.
$S \approx 3 \cdot 33 + 5 \cdot 20 + 10 \cdot 11 = 309$

Felbecsüljük az összeget, úgy, hogy az árakat egységekre **hiánnyal közelítjük:**
$32{,}9 \approx 32$; $19{,}29 \approx 19$; $10{,}5 \approx 10$.
$S \approx 3 \cdot 32 + 5 \cdot 19 + 10 \cdot 10 = 291$

Felbecsüljük az összeget, úgy, hogy az árakat egységekre **kerekítjük:**
$32{,}9 \approx 33$; $19{,}29 \approx 19$; $10{,}5 \approx 11$.
$S \approx 3 \cdot 33 + 5 \cdot 19 + 10 \cdot 11 = 304$

Megjegyzés: Mindegyik nővér helyesen becsülte meg az összeget, csak különböző módon. A helyes válasz **legközelebbi becslése** az, amelyet a tagok kerekítésével kaptuk meg. Néha előnyös, ha mindegyik tagot hiánnyal vagy többlettel való közelítéssel adjuk meg. A becslések nagyon fontosak a hétköznapi tevékenységekkel kapcsolatos feladatokban. Ezek segítenek, hogy előnyös gyakorlati döntéseket hozzunk.

Gyakorlati alkalmazás:



1) Beosztásos vonalzó segítségével szerkeszd meg az $ABCD$ négyzetet, melynek oldalhossza 1 dm.
2) Szerkeszd meg az AC átlóját.
3) Írd fel az ABC derékszögű háromszögben Pitagorasz tételét.
4) Figyelmesen mérd meg az AC szakasz hosszát, használva a beosztásos vonalzót. Jegyezd le a mért értéket deciméterben, és hasonlítsd össze a szomszéd osztálytársaid értékeivel.

- AC az ABC háromszög átfogója, $AB = BC = 1$ dm, tehát: $BC^2 = AB^2 + AC^2$, vagyis $AC^2 = 1 + 1 = 2$.
- Figyelmesen megmérve az AC szakasz hosszát 1,4 dm-hez közeli értékeket kapunk.

Fedezzük fel, értsük meg!

Az $AC^2 = 2$ egyenlőség azt jelenti, hogy létezik egy olyan szám (még nem ismerjük), melynek négyzete 2. Mivel az AC egy szakasz hossza, így $AC > 0$. Azt mondjuk, hogy $AC = \sqrt{2}$.
Mérésekből megállapítható, hogy a $\sqrt{2}$ szám értéke 1,4-re becsülhető.
Felmerül a kérdés: hány tizedes jegye van még? Meghatározható az összes?
Az alábbiakban néhány választ kaphatunk e kérdésre:

Ha $\sqrt{2} = q$, akkor $q^2 = 2$.
A q számot próbálgatással keressük.

$1^2 = 1$	$< 2 < 4$	$= 2^2$
$1{,}4^2 = 1{,}96$	$< 2 < 2{,}25$	$= 1{,}5^2$
$1{,}41^2 = 1{,}9881$	$< 2 < 2{,}0164$	$= 1{,}42^2$
$1{,}414^2 = 1{,}999396$	$< 2 < 2{,}002225$	$= 1{,}415^2$

A próbálgatások alapján arra a következtetésre jutottunk, hogy nem kaptunk elegendő információt ahhoz, hogy meghatározzuk a q racionális számot, viszont elég közeli értékeket találtunk. Azt mondjuk, hogy a $\sqrt{2}$ számot fel tudjuk ***becsülni***. A fizikában racionális számok négyzetgyökének meghatározására, általában századokra, hiánnyal való közelítő értékeket használnak.
Példák: $\sqrt{2} \approx 1{,}4$; $\sqrt{3} \approx 1{,}73$; $\sqrt{5} \approx 2{,}23$.

Bármely $x \geq 0$, ***racionális szám esetén létezik a*** $\sqrt{x}$ ***négyzetgyöke.***

$$\sqrt{x} = n \Leftrightarrow x = n^2, \text{ ahol } n \geq 0$$